Jak pisać kartkówki – poradnik dla autorów rozwiązań

1 Dwie najważniejsze zasady

Autor powinien jasno przekazywać swój tok rozumowania i nie pozostawiać nic domyślności sprawdzającego. Rozwiązanie powinno świadczyć o zrozumieniu przez autora materiału obowiązującego na kartkówkę.

2 Uwagi językowe

Nie trzeba pisać długich, pełnych zdań (na kartkówce zazwyczaj nie ma na to czasu), można stosować skróty zamiast całych wyrazów, niemniej wszystkie oznaczenia muszą być zdefiniowane, a obliczenia skomentowane (poza standardowymi przekształceniami rachunkowymi).

3 Przykłady dobrych i niedobrych rozwiązań kartkówkowych

W nawiasach kwadratowych podaję moje uwagi do danego rozwiązania.

Zadanie dotyczące zasady szufladkowej. Komputer tworzy plik z wyrazami (niekoniecznie mającymi sens) złożonymi z 9 liter polskiego alfabetu. Sposobu, w jaki komputer wybiera wyrazy, nie znamy. Znajdź najmniejszą liczbę wyrazów, jakie trzeba wygenerować, aby mieć pewność, że wśród nich będzie przynajmniej pięć takich samych. Nie zapomnij o uzasadnieniu, że mniejsza liczba nie wystarczy.

Przykładowe dobre rozwiązanie 1.
szufladki – wszystkie możliwe wyrazy 9-literowe, złożone z liter polskiego alfabetu
kulki – wyrazy wygenerowane przez komputer
s – liczba szufladek, $s = 32^9$
k – liczba kulek

Dla $k > 4 \cdot s$ z zasady szufladkowej wynika, że w jakiejś szufl. znajdzie się przynajmniej 5 kulek. Czyli wśród $k = 4 \cdot 32^9 + 1$ wygener. wyrazów zawsze będzie przynajmniej 5 takich samych.

Mniej niż $4 \cdot 32^9 + 1$ wyrazów nie wystarczy: komputer może wygenerować $4 \cdot 32^9$ wyr., powtarzając każdy możliwy wyraz 4 razy. Wtedy nie ma pięciu takich samych. Tym bardziej można wygener. mniej niż $4 \cdot 32^9$ wyr. bez pięciu takich samych.

Odp.: $4 \cdot 32^9 + 1$.

Przykładowe dobre rozwiązanie 2.
Odp.: $4 \cdot 32^9 + 1$.

Mniej niż $4 \cdot 32^9 + 1$ wyr. nie wystarczy, bo komputer może wygenerować $4 \cdot 32^9$ wyrazów bez pięciu takich samych (powtarzając każdy możliwy 4 razy).

Wśród $4 \cdot 32^9 + 1$ wyr. na pewno jakiś wyraz wystąpi 5 razy. Zał. nie wprost, że tak nie jest. Wtedy istniałaby lista długości $4 \cdot 32^9 + 1$, na której każdy wyraz wystąpił co najwyżej 4 razy. Możliwych wyrazów jest 32^9, zatem na liście byłoby co najwyżej $4 \cdot 32^9$ wyr. – sprzeczność.

Przykładowe niepełne rozwiązanie 1.
Szukaną liczbą wyrazów jest $4 \cdot 32^9 + 1$, bo gdyby było ich $4 \cdot 32^9$, wtedy każdy wyraz powtórzyłby się tylko 4 razy.

[Nie jest jasne, co autor ma na myśli: Czy wg niego część zdania po ,,bo gdyby” uzasadnia, że liczba $4 \cdot 32^9 + 1$ jest wystarczająca, czy może uzasadnia, że mniejsza być nie może? Czy przez ,,wtedy każdy wyraz powtórzyłby się tylko 4 razy” rozumie, że na każdej liście komputera każdy wyraz by się powtórzył 4 razy, czy że istnieje komputerowa lista o tej własności?]

Przykładowe niepełne rozwiązanie 2.
Szukaną liczbą wyrazów jest $4 \cdot 32^9 + 1$. Mniej wyrazów nie wystarczy, bo komputer może wygenerować listę $4 \cdot 32^9$ wyrazów, powtarzając każdy możliwy wyraz 4 razy.
[To rozwiązanie wygląda lepiej niż poprzednie. Brak tu jednak dowodu, że liczba $4 \cdot 32^9 + 1$ jest wystarczająca (dla pięciu powtórzeń).]

Przykładowe niepełne rozwiązanie 3.
szufladki – wszystkie możliwe wyrazy 9-literowe, złożone z liter polskiego alfabetu
kulki – wyrazy wygenerowane przez komputer
s – liczba szufladek, $s = 32^9$
Z zasady szufladkowej wynika, że aby jakiś wyraz powtórzył się 5 razy, trzeba wygenerować $4 \cdot 32^9 + 1$ wyrazów.
[Tok rozumowania autora nie jest jasny. Czy z zasady szufladkowej wnioskuje, że wyrazów nie może być mniej niż $4 \cdot 32^9 + 1$, czy może chodzi o to, że ta liczba jest wystarczająca? W obu przypadkach brakuje wyjaśnienia, jak stwierdzenie autora wynika z zasady szufladkowej.]

Przykładowe niepełne rozwiązanie 4.
szufladki – wszystkie możliwe wyrazy 9-literowe, złożone z liter polskiego alfabetu
kulki – wyrazy wygenerowane przez komputer
s – liczba szufladek, $s = 32^9$
k – liczba kulek
Korzystam z zasady szufladkowej:
$k > 4 \cdot s$
$k > 4 \cdot 32^9$
$k \geqslant 4 \cdot 32^9 + 1$
Czyli szukaną liczbą jest $4 \cdot 32^9 + 1$.
[Nie jest jasne, w jaki sposób autor korzysta z zasady szufladkowej. Czy wyprowadza warunek wystarczający czy konieczny dla 5 powtórzeń wyrazu? Czy pierwsza nierówność jest założeniem czy tezą?]

Przykładowe niepełne rozwiązanie 5.
Łatwo policzyć, że wszystkich możliwych wyrazów jest 32^9. Rozważmy najgorszy przypadek, gdy komputer powtórzył każdy możliwy wyraz 4 razy. Wtedy na liście byłoby $4 \cdot 32^9$ wyrazów. Jeśli dodamy do listy jeszcze jeden wyraz, to na pewno któryś powtórzy się 5 razy. Zatem szukaną liczbą jest $4 \cdot 32^9 + 1$.
[Autor nie napisał, co to znaczy, że ,,przypadek A jest gorszy od przypadku B''. Pod jakim względem przypadek jest najgorszy? Ponadto brak dowodu, że jeśli twierdzenie jest prawdziwe w ,,najgorszym'' przypadku, to jest też prawdziwe dla pozostałych, lepszych, przypadków. Nawiasem mówiąc, autor pozostawił sprawdzającej domyślenie się, jakie twierdzenie jest dowodzone za pomocą ,,najgorszego przypadku''. No właśnie, jakie?]

Przykładowe niepełne rozwiązanie 6.
Łatwo policzyć, że wszystkich możliwych wyrazów jest 32^9. Uzasadnimy, że na każdej liście $4 \cdot 32^9 + 1$ wyrazów pewien wyraz wystąpi 5 razy. Rozważmy najgorszy przypadek, gdy komputer powtórzył każdy możliwy wyraz 4 razy. Wtedy na liście byłoby $4 \cdot 32^9$ wyrazów, sprzeczność z założeniem, że jest ich $4 \cdot 32^9 + 1$.

Mniej niż $4 \cdot 32^9 + 1$ wyrazów nie wystarczy: komputer może wygenerować $4 \cdot 32^9$ wyr., powtarzając każdy możliwy wyraz 4 razy. Wtedy nie ma pięciu takich samych. Tym bardziej można wygener. mniej niż $4 \cdot 32^9$ wyr. bez pięciu takich samych.

Odp.: $4 \cdot 32^9 + 1$.

[Druga częśc rozwiązania jest poprawna, pierwsza nie. Dowodzenie twierdzenia typu ,,dla każdego'' za pomocą szczególnego przypadku (choćby nawet ,,najgorszego'') jest poważnym błędem. Dowód byłby poprawny, gdyby autor napisał, co to znaczy, że ,,przypadek A jest gorszy od przypadku B'' oraz pokazał, jak z rozumowania dla ,,najgorszej'' listy wyrazów wynika twierdzenie dla wszystkich list wyrazów.]